Produit scalaire dans l'espace

I) Produit scalaire du plan (rappel)

1) Différentes expressions du produit scalaire

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls alors :

• $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}(\|\vec{v}+\vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2)$ (*Forme triangulaire*)

• $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\,\vec{v})$ (*Expression trigonométrique*)

• **Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$), si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$, alors :**

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy'$ *(Expression dans un repère orthonormé)*

• **Si dans un plan $\mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :**

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AH}$ *(Expression à l'aide de projections)*

2) Propriétés du produit scalaire

• $\vec{u}\,.\,\vec{v} = \vec{v}\,.\,\vec{u}$

• $(\vec{u}+\vec{v})\,.\,\vec{w} = \vec{u}\,.\,\vec{w} + \vec{v}\,.\,\vec{w}$ et $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w}) = \vec{u}\,.\,\vec{v} + \vec{u}\,.\,\vec{w}$

• $\vec{u}^2 = \vec{u}\,.\,\vec{u} = \|\vec{u}\|^2$

3) Identités remarquables :

• $\|\vec{u}+\vec{v}\|^2 = (\vec{u}+\vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u}.\,\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 + 2\vec{u}.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

• $\|\vec{u}-\vec{v}\|^2 = (\vec{u}-\vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u}.\,\vec{v} + \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - 2\vec{u}.\,\vec{v} + \|\vec{v}\|^2$

• $(\vec{u}+\vec{v})(\vec{u}-\vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2 = \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2$

4) Orthogonalité et produit scalaire

• **Les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si: $\vec{u}.\,\vec{v} = 0$**

• **Soit (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) un repère orthonormé, $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de coordonnées respectives $(x\,;\,y)$ et $(x'\,;\,y')$:**
$\vec{u}\,.\,\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si : $xx' + yy' = 0$

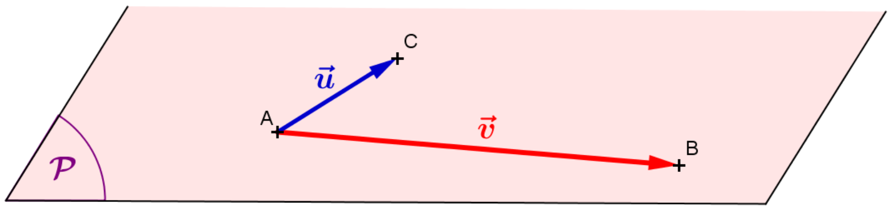
II) Produit scalaire dans l'espace

1) Définition

Soit $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs de l'espace.

Il existe trois points A, B et C tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$.

Il existe toujours un plan $\mathcal{P}$ contenant A, B et C.



On appelle produit scalaire des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ de l'espace le produit scalaire des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ dans le plan $\mathcal{P}$.

Remarque :

En se plaçant dans un plan $\mathcal{P}$, on retrouve les différentes expressions du produit scalaire excepté l'expression dans un repère du plan)

Les propriétés du produit scalaire restent les mêmes :

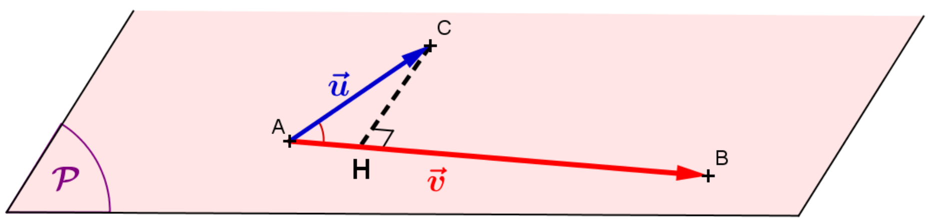
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace on a alors :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v} + \vec{u}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$ *(Forme triangulaire)*

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})$ *(Expression trigonométrique)*

- **Si dans un plan $\mathcal{P}$, H est le projeté orthogonal de C sur (AB) alors :**

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AH}$ *(Expression à l'aide de projections)*



2) Expression analytique du produit scalaire

Dans un repère orthonormé de l'espace (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), si deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ont pour coordonnées respectives (x ; y ; z) et (x'; y' ; z'), alors :

$\vec{u}\,.\,\vec{v} = xx' + yy' + zz'$

Démonstration: Dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), orthonormé de l'Espace : $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$

alors :

$$\vec{u}\,.\,\vec{v} = \frac{1}{2}\left(\|\vec{v}+\vec{u}\,\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x+x')^2 + (y+y')^2 + (z+z')^2 - (x^2+y^2+z^2) - (x'^2+y'^2+z'^2)\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(x^2+2xx'+x'^2) + (y^2+2yy'+y'^2) + (z^2+2zz'+z'^2) - x^2 - y^2 - z^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[2xx' + 2yy' + 2zz' + x^2 - x^2 + x'^2 - x'^2 + y^2 - y^2 + y'^2 - y'^2 + z^2 - z^2 + z'^2 - z'^2\right]$$

$$= \frac{1}{2}\,(2xx' + 2yy' + 2zz'] = xx' + yy' + zz'$$

Donc : $\boldsymbol{\vec{u}.\vec{v} = xx' + yy' + zz'}$

Remarques:

- Si $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ alors $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2 = x^2 + y^2 + z^2$

- Si $A(x_A, y_A\,, z_A)$ et $B(x_B, y_B\,, z_B)$ alors AB $= \|\overrightarrow{AB}\| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$

Exemple : Dans un repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$), A(-1 ;1 ;2) B(0 ;1 ;0) et C(2 ;0 ;2)

a) Calculer $\overrightarrow{AB}\,.\,\overrightarrow{AC}$.

b) Calculer AB.

Réponse :

a) $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 1 \times 3 + 0 \times (-1) + (-2) \times 0 = 3$

$\boldsymbol{\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = 3}$

b) $AB = \sqrt{1^2 + (-2)^2} = \sqrt{5}$

III) Orthogonalité dans l'espace

1) vecteurs orthogonaux

Définition:

Dans l'espace, dire que deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non nuls sont orthogonaux signifie que si $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$ alors les droites (AB) et (AC) sont orthogonales.

Remarque: Par convention le vecteur nul est orthogonal à tous les vecteurs

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont deux vecteurs non nuls de l'espace. Soit A, B et C trois points tel que $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et $\vec{v} = \overrightarrow{AC}$

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

Dans un repère orthonormé de l'espace $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}$:

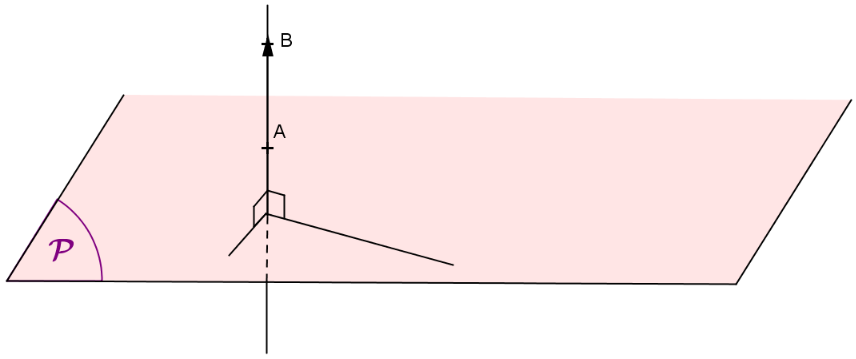
$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si $xx' + yy' + zz' = 0$

Exemple :

$\vec{u}(1;-1;2)$ $\vec{v}(-1;1;1)$ et $\vec{u} \cdot \vec{v} = -1 - 1 + 2 = 0$ Donc les vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

2) vecteur normal à un plan

Un vecteur $\overrightarrow{AB}$ non nul, est normal à un plan $\mathcal{P}$ signifie que la droite (AB) est perpendiculaire à ce plan $\mathcal{P}$.



Remarque: Tout vecteur $\vec{n}$ non nul colinéaire à $\overrightarrow{AB}$ est aussi un vecteur normal à ce plan $\mathcal{P}$

3) Théorème de la porte

Si une droite Δ est perpendiculaire en A à deux droites sécantes d'un plan $\mathcal{P}$, alors elle est perpendiculaire à toutes les droites de ce plan.

Démonstration exigible:

Notons $\vec{n}$ un vecteur directeur de Δ et $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ des vecteurs directeurs respectifs des droites $d_1$et d_2.

Comme Δ est perpendiculaire à d_1 alors on a: $\vec{n}.\overrightarrow{u_1} = 0$

Comme Δ est perpendiculaire à d_2 alors on a: $\vec{n}.\overrightarrow{u_2} = 0$

Comme les droites d_1 et d_2 sont sécantes en A, les vecteurs $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires.

Soit d une droite du plan $\mathcal{P}$, de vecteur directeur $\vec{v}$

Les vecteurs $\vec{v}$, $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ sont donc coplanaires et comme $\overrightarrow{u_1}$ et $\overrightarrow{u_2}$ ne sont pas colinéaires, il existe deux nombres a et b tel que $\vec{v} = a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}$

On a alors :

$\vec{n}.\vec{v} = \vec{n}.(a\overrightarrow{u_1} + b\overrightarrow{u_2}) = a(\vec{n}.\overrightarrow{u_1})+ b(\vec{n}.\overrightarrow{u_2}) = 0$ car $\vec{n}.\overrightarrow{u_1} = 0$ et $\vec{n}.\overrightarrow{u_2} = 0$ donc

$\vec{n}.\vec{v} = 0$

Donc Δ est orthogonale à n'importe quelle droite de ce plan $\mathcal{P}$.

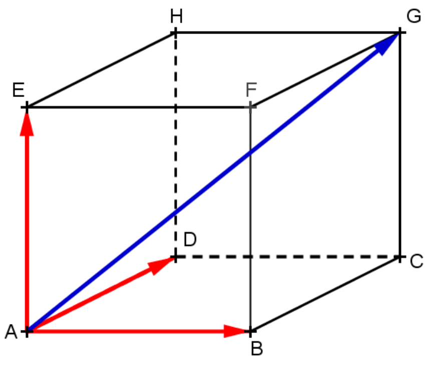
Pour montrer qu'un vecteur $\vec{n}$ non nul est normal à un plan $\mathcal{P}$, il suffit de montrer qu'il est orthogonal à deux vecteurs du plan $\mathcal{P}$ non colinéaires.

Remarques:

• Pour montrer qu'une droite (AB) est perpendiculaire à un plan $\mathcal{P}$, il suffit de montrer que $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$
• Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont perpendiculaires, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont orthogonaux.
• Pour montrer que deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont parallèles, il suffit de montrer que leurs vecteurs normaux sont colinéaires.

Exemple :

ABCDEFGH est un cube d'arête 1 cm. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (CFH).



Réponse: Montrons que le vecteur $\overrightarrow{AG}$ est normal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan.

Dans le repère orthonormé $(A\ ;\ \overrightarrow{AB}\ ;\ \overrightarrow{AD}\ ;\ \overrightarrow{AE})$ les points F ; G ; H et C ont pour coordonnées :

$F\,(1\ ;\ 0\ ;\ 1)$; $G\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$; $H\,(0\ ;\ 1\ ;\ 1)$ et $C\,(1\ ;\ 1\ ;\ 0)$

$\overrightarrow{AG}\,(1\ ;\ 1\ ;\ 1)$; $\overrightarrow{HF}\,(1\ ;\ -1\ ;\ 0)$ et $\overrightarrow{FC}\,(0\ ;\ 1\ ;\ -1)$

$\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{HF} = 1-1=0$ et $\overrightarrow{AG}.\overrightarrow{FC} = 0+1-1=0$

Donc $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal aux deux vecteurs $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{FC}$.

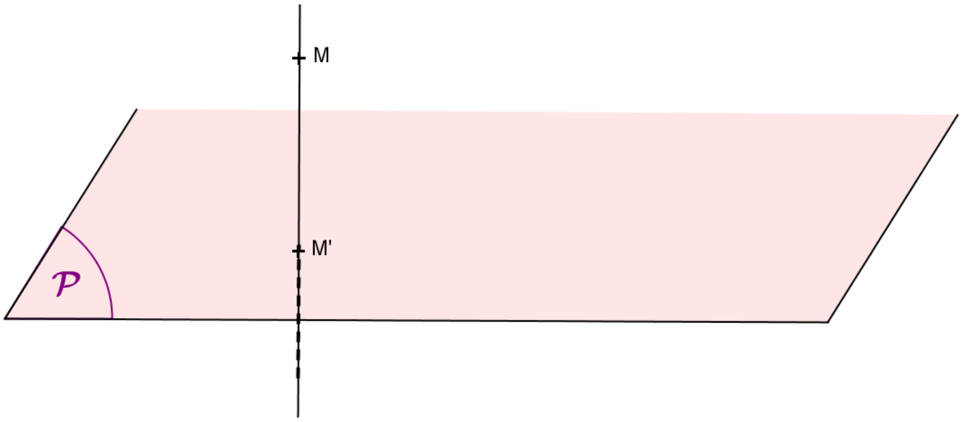
Donc $\overrightarrow{AG}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires du plan (CFH) donc $\overrightarrow{AG}$ est normal au plan (CFH).

4) Projection orthogonale sur un plan

Définition:

Soit $\mathcal{P}$ un plan et M un point de l'espace.

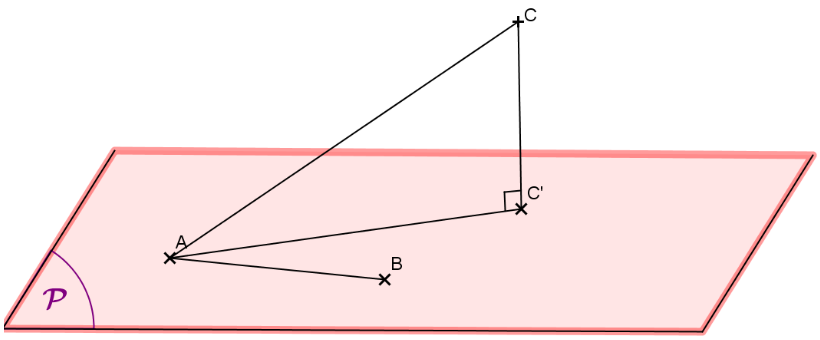
On appelle projeté orthogonal de M sur le plan $\mathcal{P}$ le point M', intersection de $\mathcal{P}$ et de la droite perpendiculaire à $\mathcal{P}$ passant par M.



Propriété:

Soient A, B et C trois points , $\mathcal{P}$ un plan contenant A et B, C un point de l'espace n'appartenant pas à $\mathcal{P}$.

On note C' le projeté orthogonal de C sur $\mathcal{P}$. On a alors : $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$



Démonstration:

$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.(\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{C'C}) = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'} + \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C}$
Comme les vecteurs $\overrightarrow{C'C}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont orthogonaux alors $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{C'C} = 0$ et donc
$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$

IV) Equation cartésienne du plan

1) Théorème

Dans un repère orthonormé de l'espace (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$)

• tout plan $\mathcal{P}$ de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ a une équation cartésienne de la forme :

$\boldsymbol{ax + by + cz + d = 0}$ $\qquad$ $\boldsymbol{d} \in \mathbb{R}$

• Réciproquement si a, b, c sont trois nombres donnés non tous nuls, l'ensemble des points $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant l'équation $ax + by + cz + d = 0$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

Démonstration exigible:

Soit $\mathcal{P}$ un plan passant par le point $A\,(x_A, y_A\,, z_A)$ et vecteur normal $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

• $M(x\,;y\,;z) \in \mathcal{P}$ équivaut à : $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$

équivaut à : $a(x - x_A) + b(y - y_A) + c(z - z_A) = 0$

équivaut à : $ax + by + cz - ax_A - by_A - cz_A = 0$

en posant $d = -ax_A - by_A - cz_A$

on obtient donc: $ax + by + cz + d = 0$

● Réciproquement, soit $M(x\,;y\,;z)$ vérifiant $ax + by + cz + d = 0$

Comme les nombres a, b et c ne sont pas tous nul alors on peut supposer que $a \neq 0$.

Dans ce cas, le point A de coordonnées $(-\frac{d}{a}\ ;\ 0\ ;\ 0)$ vérifie l'équation :

$ax + by + cz + d = 0$ il appartient donc au plan $ax + by + cz + d = 0$.

En posant $\vec{n}\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ alors $\overrightarrow{AM}.\vec{n} = a(x + \frac{d}{a}) + by + cz = ax + by + cz + d = 0$

Ce qui prouve que le point M appartient au plan passant par A et de vecteur normal $\vec{n}$.

Remarque :

Pour trouver, dans un repère orthonormé, l'équation cartésienne d'un plan dont on connait un point A et un vecteur normal $\vec{n}$, il suffit d'exprimer l'égalité
$\overrightarrow{AM}.\vec{n} = 0$ à l'aide des coordonnées de A et de $\vec{n}$

Exemples :

Exemple 1 : Déterminer une équation cartésienne du plan par un point et un vecteur normal.

Dans le repère (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) orthonormé, déterminer le plan $\mathcal{P}$ définie par $A\,(2\ ;\ 0\ ;\ 4)$ et un vecteur normal $\vec{n}\,(1\ ;\ 3\ ;\ -3)$

Réponse : On connait $\vec{n}\,(1\ ;\ 3\ ;\ -3)$ qui est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme :

$x + 3y - 3z + d = 0$ Comme ce plan passe par le point $A\,(2\ ;\ 0\ ;\ 4)$ alors

$2 - 12 + d = 0$ $\qquad$ $\boldsymbol{d = 10}$

$\mathcal{P}$ a donc pour équation $\boldsymbol{x + 3y - 3z + 10 = 0}$

Exemple 2: Dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) les points A et B ont respectivement pour coordonnées : $A\,(3\ ;\ -2\ ;\ 2)$ et $B(6; 1; 5)$

Déterminer l'équation du plan passant par A perpendiculaire à (AB)

Réponse :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ donc $\mathcal{P}$ a une équation de la forme :

$3x + 3y + 3z + d = 0$

Comme il passe par le point A, on obtient :

$9-6+6+d=0$ donc $\boldsymbol{d=-9}$

L'équation du plan est : $\boldsymbol{3x+3y+3z-9=0}$

Exemple 3: Dans un repère orthonormé (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$, $\vec{k}$) les points A ; B et C ont respectivement pour coordonnées : $A\,(2\,;\,-4\,;\,8)$ $B(-4\,;-12\,;10)$ et $C(-8\,;\,0\,;-6)$

Déterminer l'équation du plan passant par les points A ; B et C

Réponse :

$\overrightarrow{AB}(-6\,;\,-8\,;2)$; $\overrightarrow{AC}(-10\,;\,4\,;-14)$ Leurs coordonnées ne sont pas proportionnelles donc il n'existe pas de nombre k tel que $\overrightarrow{AC}=k\overrightarrow{AB}$, les points A ; B et C ne sont pas alignés.

Soit $\vec{n}$ un vecteur normal à $\mathcal{P}$ de coordonnées : $\vec{n}\,(x\,;\,y\,;\,z)$ alors $\vec{n}$ est orthogonal à deux vecteurs non colinéaires de ce plan :

$\vec{n}.\overrightarrow{AB}=\ -6x-8y+2z=0$

$\vec{n}.\overrightarrow{AC}=\ -10x+4y-14z=0$

On obtient le système :

$\begin{cases}-6x-8y+2z=0\\-10x+4y-14z=0\end{cases}$ en multipliant la 2ème par ligne par 2 on obtient le système équivalent:

$\begin{cases}-6x-8y+2z=0\\-20x+8y-28z=0\end{cases}$ en additionnant les deux lignes on obtient le système équivalent :

$\begin{cases}-6x-8y+2z=0\\-26x-26z=0\end{cases}$ on obtient donc :

$\begin{cases}-6x-8y+2z=0\\\boldsymbol{x=-z}\end{cases}$

En remplace x par $-z$ dans la 1ère équation :

$6z-8y+2z=0$

$8z-8y=0$ donc $\boldsymbol{y=z}$

Donc le vecteur $\vec{n}$ est de la forme : $\vec{n}\,(-z\,;\,z\,;\,z)$

Nous pouvons prendre $\vec{n}\,(-1\,;\,1\,;\,1)$ Donc l'équation du plan $\mathcal{P}$ est de la forme :

$-x+y+z+d=0$ Comme $A\in\mathcal{P}$ on en déduit : $-2-4+8+d=0$

$d=-2$

L'équation du plan $\mathcal{P}$ est donc : $\boldsymbol{-x+y+z-2=0}$

2) Positions relatives d'une droite et d'un plan

Si $\mathcal{D}$ est une droite de vecteur directeur $\vec{u}$ et $\mathcal{P}$ un plan de vecteur normal $\vec{n}$:

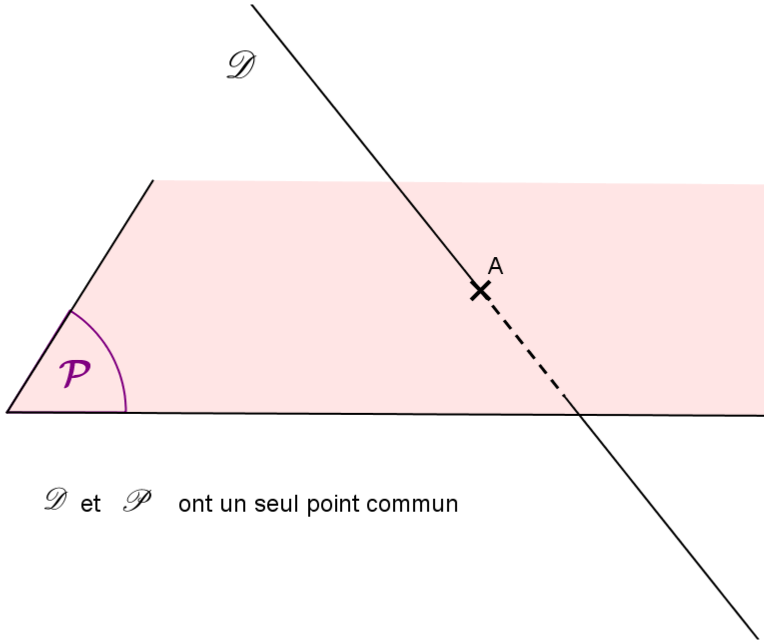
• Si $\vec{n}.\vec{u} \neq 0$ alors $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants en un point.

• Si $\vec{n}.\vec{u} = 0$ alors la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle à $\mathcal{P}$ ou incluse dans $\mathcal{P}$:

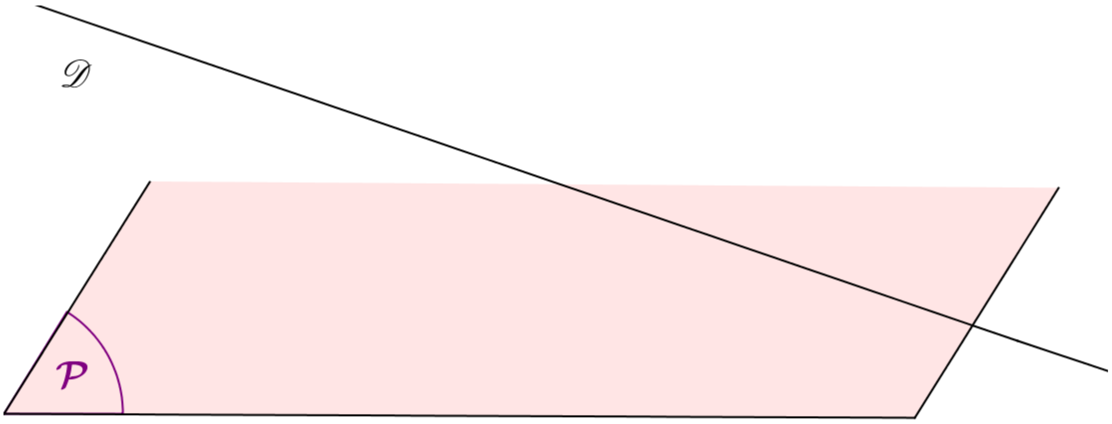
A étant un point quelconque de $\mathcal{D}$:

- Si A $\in \mathcal{P}$ alors la droite $\mathcal{D}$ est incluse dans le plan

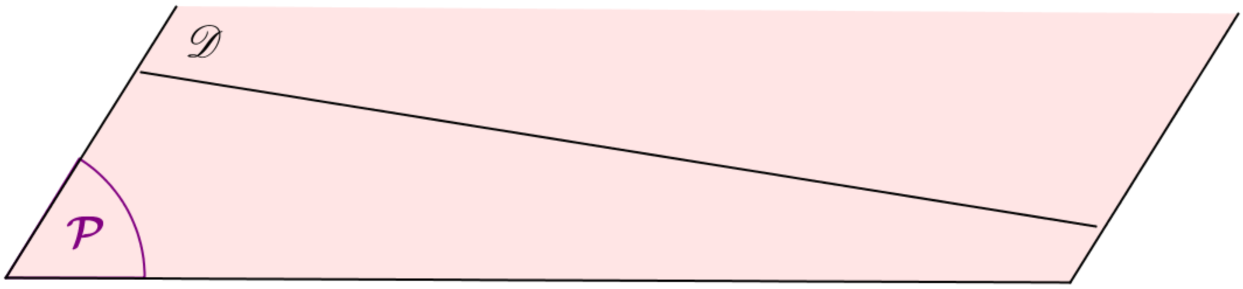
- Si A $\notin \mathcal{P}$ alors la droite $\mathcal{D}$ est strictement parallèle au plan $\mathcal{P}$



$\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ ont un seul point commun



$\mathscr{D}$ et $\mathscr{P}$ n'ont aucun point commun



$\mathscr{D}$ est incluse dans $\mathscr{P}$

Exemples:

Exemple 1: Dans un repère orthonormé (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$, $\vec{k}$) de l'espace, étudier la position relative du plan $\mathcal{P}$ d'équation : $4x - 2y + 6z - 4 = 0$ et de la droite $\mathcal{D}$ d'équation paramétrique :

$$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}$$

Réponse :

$\vec{n}\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 6 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $\vec{u}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$.

$\vec{n}.\vec{u} = 4 - 2 + 12 = 14 \neq 0$

Donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants en un point et ce point vérifie :

$\begin{cases} x = -2 + t \\ y = 1 + t \\ z = 2t \end{cases}$ on a donc : $4(-2 + t) - 2(1 + t) + 6 \times 2t - 4 = 0$

$-8 + 4t - 2 - 2t + 12t - 4 = 0$

$14t - 14 = 0$ donc $t = 1$

On obtient donc :

$$\begin{cases} x = -2 + 1 \\ y = 1 + 1 \\ z = 2 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = 2 \end{cases}$$

$\mathcal{P}$ et $\mathcal{D}$ sont sécants au point A(-1 ;2 ;2)

Exemple 2: Le plan $\mathcal{P}$ d'équation $2x - y + z - 8 = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ passant par les points

A(3 ;-1 ;0) et B(1 ;1 ;-1) se coupent en un point I dont on calculera les coordonnées :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur de $\mathcal{D}$ et $\vec{n}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.

$\overrightarrow{AB}.\vec{n} = -5$ donc $\overrightarrow{AB}$ et $\mathcal{P}$ sont sécants

$\begin{cases} x = 1 - 2t \\ y = 1 \\ z = -1 - t \end{cases}$ est une équation paramétrique de $\mathcal{D}$. Le point d'intersection vérifie l'équation :

$$2(1-2t) - 1 + (-1-t) - 8 = 0$$

$-5t - 8 = 0$ et donc $t = \frac{-8}{5}$ on obtient donc :

$\begin{cases} x = \frac{21}{5} \\ y = 1 \\ z = \frac{3}{5} \end{cases}$ **Les coordonnées du point I sont $\left(\frac{21}{5}\ ;\ 1\ ;\ \frac{3}{5}\right)$**

3) Positions relatives de deux plans

$\mathcal{P}$ est un plan de vecteur normal $\vec{n}$ et $\mathcal{P}'$ est un plan de vecteur normal $\overrightarrow{n'}$:

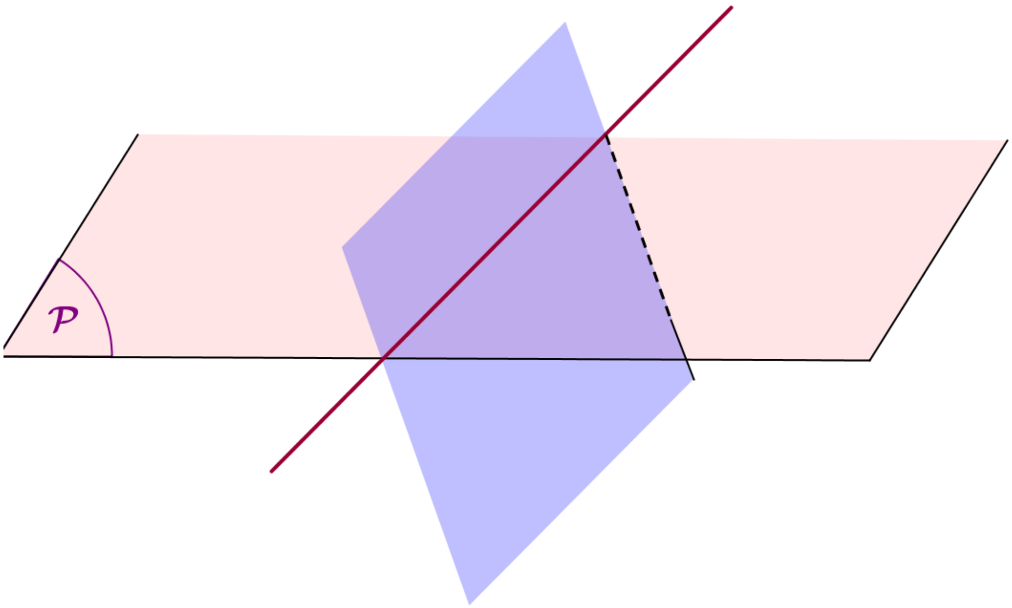
• Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ sont colinéaires les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles ou confondus

A étant un point quelconque de $\mathcal{P}$ alors :

- Si A $\in \mathcal{P}'$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont confondus.

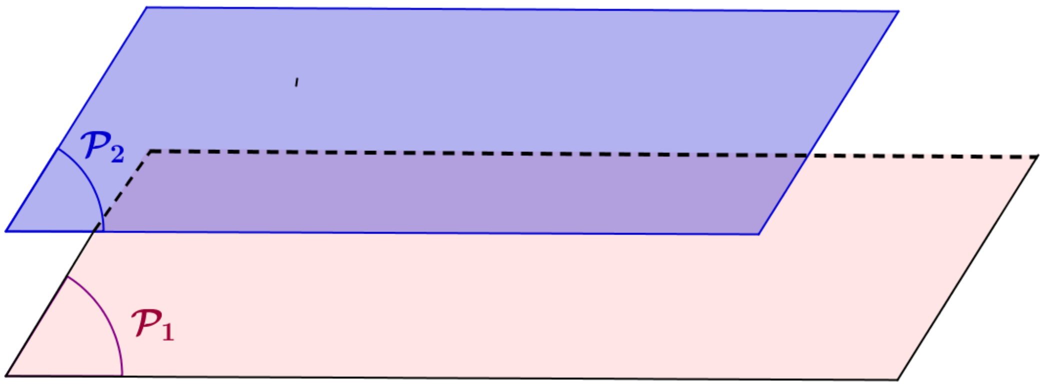
- Si A $\notin \mathcal{P}'$ alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont strictement parallèles.

• Si $\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires alors les plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants leur intersection est une droite $\mathcal{D}$.



Leur intersection est la droite $\mathscr{D}$

Leur intersection est un plan



Leur intersection est vide

Exemples:

Exemple 1: Soient $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ deux plans d'équation respectifs :

$\mathcal{P}$: $2x + 2y - 2z + 4 = 0$ et $\mathcal{P}'$: $6x + 2y + 2z + 8 = 0$

Déterminer une équation paramétrique de leur droite d'intersection $\mathcal{D}$.

Réponse :

$\vec{n}\begin{pmatrix}2\\2\\-2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ et $\overrightarrow{n'}\begin{pmatrix}6\\2\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}'$

$\vec{n}$ et $\overrightarrow{n'}$ ne sont pas colinéaires donc $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ sont sécants.

Soit $M(x;y;z)$ appartenant à la droite $\mathcal{D}$,intersection des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$,
vérifie le système :

$(S)\begin{cases}2x+2y-2z+4=0\\6x+2y+2z+8=0\end{cases}$ On soustrait la 1ière ligne à la 2ème, on obtient le système équivalent :

$(S')\begin{cases}2x+2y-2z+4=0\\4x+4z+4=0\end{cases}$ on obtient le système équivalent :

$(S'')\begin{cases}2x+2y-2z+4=0\\ \boldsymbol{z=-x-1}\end{cases}$

En remplaçant la valeur de z dans la 1ière équation on obtient:

$2x+2y-2(-x-1)+4=0$

$2x+2y+2x+2+4=0$

$2y=-4x-6$

$\boldsymbol{2y=-2x-3}$

x prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$.

En posant $x=$t il en résulte :

$\begin{cases}x=t\\y=-2t-3\\z=-t-1\end{cases}\qquad t\in\mathbb{R}$

C'est l'équation paramétrique de la droite $\mathcal{D}$ intersection des deux plans $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.

Exemple 3: Déterminer l'équation du plan $\mathcal{P}'$ parallèle au plan $\mathcal{P}$ d'équation $3x-2y+4z-2=0$ et passant par le point $A(2\,;-1\,;4)$

$\vec{n}\begin{pmatrix}3\\-2\\4\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$ qui est aussi normal à $\mathcal{P}'$

$\mathcal{P}'$ a une équation de la forme :

$3x-2y+4z+d=0$ comme il passe par le point $A(2\,;-1\,;4)$

$6+2+16+d=0$ donc $d=-24$

Donc $\mathcal{P}'$ a pour équation : $\boldsymbol{3x-2y+4z-24=0}$