Démonstrations :

1) Comment démontrer que 1/3 n'est pas un nombre décimal :

Rappel : un nombre décimal peut se mettre sous la forme $\frac{a}{10^n}$ avec

a ϵ Z et n ϵ N.

« Raisonner par l'absurde en supposant que 1/3 est décimal.

Ce raisonnement amènera une contradiction. »

Supposons que $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal

Il existe alors 2 nombres entiers naturels **a** et **n** tel que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$

D' où $\frac{10^n}{3} = a$

a étant un entier naturel, on en déduit que 10^n est divisible par 3.

« Un nombre est divisible par 3 si la somme de ses chiffres est divisible par 3 »

Or la somme des chiffres de 10^n est **1**, donc 10^n n'est pas divisible par 3.

D' où l'hypothèse de départ « 1/3 est un nombre décimal » nous amène à une contradiction.

On en déduit qu'elle est fausse et donc 1/3 n'est pas un nombre décimal.

2) Comment démontrer que 1/7 n'est pas un nombre décimal :

a ϵ Z et n ϵ N. on a : $\frac{1}{7} = \frac{a}{10^n}$ d'où $\frac{10^n}{7} = a$

a étant un entier naturel, on en déduit que 10^n est divisible par 7**.**

La décomposition de 10^n en facteurs premiers est$(2 \times 5)^n$.

$(2 \times 5)^n = 2^n \times 5^n$ montre que 10^n n'est pas divisible par 7 qui est premier.

« On peut utiliser cette méthode pour démontrer que tout inverse premier (autre que 2 et 5) n'est pas décimal. »

Donc l'hypothèse de départ « 1/7 est un nombre décimal » nous amène à une contradiction.

On en déduit qu'elle est fausse et donc <u>1/7 n'est pas un nombre décimal.</u>

3) Comment démontrer que $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel :

Rappel : Un rationnel est un nombre qui peut s'écrire sous la forme d'un quotient de 2 nombres entiers.

Il faut raisonner par l'absurde

Supposons que $\sqrt{2}$ est un nombre rationnel.
Il existe alors 2 nombres entiers naturels non nuls **a** et **b** tel que

$$\sqrt{2} = \frac{a}{b}$$

On simplifie cette fraction pour la rendre irréductible, c'est-à-dire que **a** et **b** sont premiers entre eux

On a donc $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$

$$\sqrt{2}\, b = a$$

$$2b^2 = a^2 \quad \text{(équation 1)}$$

On en déduit de cette dernière égalité que a^2 est **pair**
(puisque a^2 est égal au double de b^2)
Donc que **a** est également pair.
Il existe donc un entier naturel **k** tel que **a** = **2 k**
Si on remplace dans l'équation 1 on obtient :

$$2b^2 = (2k)^2 \quad \text{d'où}$$

$$2b^2 = 4\,k^2 \quad \text{soit}$$

$$b^2 = 2k^2$$

On en déduit de cette dernière égalité que b^2 est pair et donc que b est également pair.

Alors a et b sont donc tous les 2 pairs, ils ne sont pas premier entre eux car divisible par 2, ce qui contredit l'hypothèse de départ, c'est-à-dire qu'ils sont premiers entre eux.
Donc $\sqrt{2}$ n'est pas un nombre rationnel.