Equations de droites

I- Introduction

1) Equation d'une droite

Dans un repère (O, I, J) on donne les points $A(2;1)$ et $B(6;-1)$.
Soit $M(x;y)$ un point de la droite (AB), en utilisant l'alignement des points A, B et M trouver une relation entre x et y.

2) Ensemble de points

Réciproquement : On considère l'ensemble des points $M(x;y)$ du plan tels que $y = 2x - 1$
Quelle est la nature de cet ensemble ?

3) Cas particulier

Soit $C(2;-3)$. Déterminer l'équation de la droite (AC).

II- Equation d'une droite

1) Equation réduite d'une droite

Propriété

Une droite $\mathscr{D}$ du plan admet une équation de la forme $y = ax + b$ ou $x = c$.
Cette équation est l'équation réduite de $\mathscr{D}$.
a est le coefficient directeur de $\mathscr{D}$ et b l'ordonnée à l'origine.

Propriété

- Réciproquement : L'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x;y)$ vérifiant $y = ax + b$ est une droite coupant l'axe des ordonnées.
- L'ensemble des points M du plan de coordonnées $(x;y)$ vérifiant $x = c$ est une droite parallèle à l'axe des ordonnées.

2) Tracer une droite dont on connaît l'équation

Exemple 1:
Représenter graphiquement dans un même repère les droites suivantes :

1) $\mathscr{D}_1 : y = -3x + 1$ 2) $\mathscr{D}_2 : x = 2$ 3) $\mathscr{D}_3 : y = 4$ 4) $\mathscr{D}_4 : y = \frac{3}{2}x - 2$

3) Un point appartient-il à une droite donnée

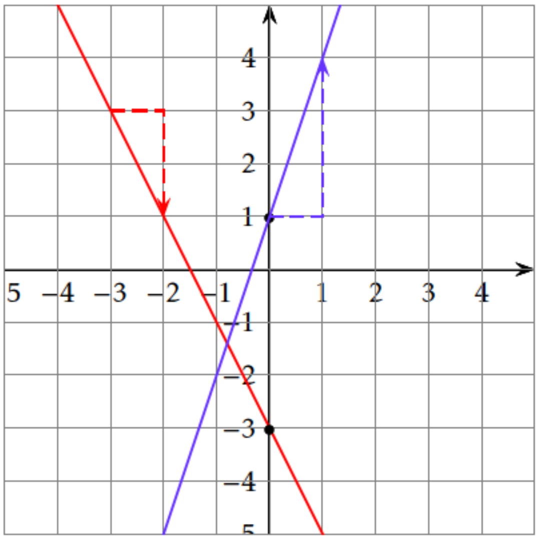
Exemple 2:
Les points $A(5;10,3)$ et $B(4,3;9)$ appartiennent-ils à la droite
$\mathscr{D}$ d'équation $y = 2x + 0,4$.

Exemple 3:
Écrire un algorithme qui test l'appartenance d'un point $(X;Y)$ donné à la droite d'équation $y = ax+b$ donnée.

4) Déterminer l'équation réduite d'une droite

a) Graphiquement

Déterminer graphiquement l'équation réduite des droites tracées ci-dessous.

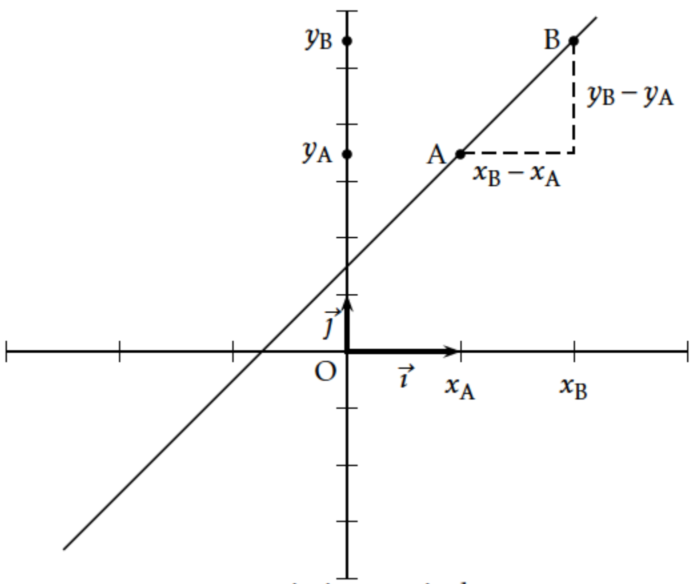


b) Par le calcul

Propriété

Soit $A(x_A;y_A)$ et $B(x_B;y_B)$ deux points distincts d'une même droite $\mathscr{D}$ non parallèle à $(0y)$ alors son coefficient directeur a est :

$$a = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$



$$a = \text{pente} = \frac{\text{variation verticale}}{\text{variation horizontale}} = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$$

Exemple 4:

Déterminer les équations réduites des droites (AB) et (CD) sachant que $A(2;-1)$, $B(-4;-4)$, $C(4;2$ et $D(-2;-2)$.

III- Position relative de 2 droites

1) Droites parallèles

a) Exemple

Soit A$(1;-3)$ et B$(-2;3)$ et (d) la droite d'équation $y=-2x+3$.

1) Tracer dans un même repère les droites (AB) et (d). Que remarque-t-on ?
2) Déterminer l'équation réduite de (AB).
3) Comment peut-on caractériser le parallèlisme de (AB) et de (d)

b) Théorème

Théorème

Deux droites d'équations respectives $y=ax+b$ et $y=a'x+b'$ sont parallèles si et seulement si $a=a'$.

c) Exercices

Exemple 5:
Déterminer parmis les droites suivantes celles qui sont parallèles.
$d_1 : y=2x+4$, $d_2 : y=-3x+4$, $d_3 : y=5$, $d_4 : y=2x+5$ et $d_5 : y=-3x+5$

Exemple 6:
Soit A$(-2;5)$ et $d : y=3x-1$.
Déterminer l'équation réduite de la droite d' parallèle à d passant par A.

2) Droites sécantes

a) Exemple

Vérifier que les droites suivantes sont sécantes puis déterminer les coordonnées de leur point d'intersection.
$\mathcal{D}_1 : y=-x+2$, $\mathcal{D}_2 : y=3x-1$, et $\mathcal{D}_3 : x=-1$.

b) Exercice

Soit A$(1;4)$, B$(5;2)$ et C$(1;-2)$.

1) Calculer les coordonnées des points I et J milieux respectifs des segments [AB] et [AC].
2) Déterminer l'équation réduite des droites (BJ) et (CI).
3) En déduire les coordonnées du point G centre de gravité du triangle ABC.

IV- Systèmes linéaires

1) Définition

Définition

- Un système linéaire de 2 équations à 2 inconnues est de la forme

$$(S)\begin{cases} ax + by = c \\ a'x + b'y = c' \end{cases}$$

- Résoudre un tel système c'est trouver tous les couples $(x;y)$ qui vérifient en même temps les 2 équations

Exemple 7:
Les couples $(5;2)$ et $(-1;6)$ sont-ils solutions du système $(S)\begin{cases}2x + 3y = 16\\7x - 4y = -31\end{cases}$

2) Résoudre graphiquement un système

Exemple 8:
Résoudre graphiquement les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases}x + 2y = 4\\3x - 2y = 8\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}2x - 4y = 6\\-x + y = -1\end{cases}$

3) Résolution par le calcul

a) Méthode par substitution

Exemple 9:
Résoudre par substitution les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases}2x + 3y = 3\\x + 2y = -4\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}6x + 5y = 8\\x - 2y = 7\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}-4x + y = -12\\3,2x - 1,5y = 4\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}3x - y = 2\\7x + 3y = 5\end{cases}$

b) Méthode par addition, soustraction

Exemple 10:
Résoudre par addition ou soustraction sur les lignes les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases}5x + 3y = 12\\5x - 3y = 4\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}4x + y = 7\\-3x - y = 2\end{cases}$

c) Méthode par combinaisons

Exemple 11:
Résoudre par combinaisons les systèmes suivants :

$(S_1)\begin{cases}5x + 3y = 2\\2x + 7y = -5\end{cases}$ $(S_2)\begin{cases}6x + 5y = 2\\7x - 2y = -13\end{cases}$ $(S_3)\begin{cases}2x + 4y = -7\\-4x + 2y = 11\end{cases}$ $(S_4)\begin{cases}3x + 2y = -2\\7x + 4y = -8\end{cases}$